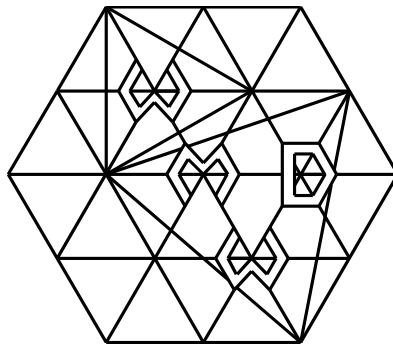


29. Wiener Mathematik- und Denksportwettbewerb

**24. April 2019
Technische Universität Wien**



**Zehn
mathematische
Denksportaufgaben
und ihre
Lösungen**

Adam schreibt gerne Zahlen auf

Adam schreibt alle durch 3 teilbaren Zahlen von 27 bis 3132 auf eine Tafel, also die Zahlen 27, 30, 33, ..., 3132.

Wie viele Zahlen stehen auf der Tafel?

Lösung:

Von den natürlichen Zahlen von 1 bis 3132 ist jede dritte durch 3 teilbar. Da 3132 durch 3 teilbar ist, sind das $3132 : 3 = 1044$ Zahlen. Von den natürlichen Zahlen von 1 bis 26 sind 8 Zahlen durch 3 teilbar. Subtrahiert man 8 von 1044, so erhält man die

Antwort:

Auf der Tafel stehen 1036 Zahlen.

Mia rechnet

Mia schreibt alle ungeraden dreistelligen Zahlen mit der Ziffernsumme 25 auf. Anschließend addiert sie diese Zahlen und subtrahiert 131.

Welches Ergebnis erhält Mia bei ihrer Rechnung?

Lösung:

Die ungeraden dreistelligen Zahlen mit der Ziffernsumme 25 sind 997, 979, 799 und 889. Addiert man diese vier Zahlen und subtrahiert von der Summe die Zahl 131, so erhält man die

Antwort:

Das Ergebnis von Mias Rechnung ist 3533.

Summe von Zahlen und ihren Teilern

Die Summe einer natürlichen Zahl n und ihres zweitgrößten Teilers beträgt 39.

Wie groß ist die Zahl n ?

(Hinweis: Der größte Teiler einer natürlichen Zahl ist die Zahl selbst.)

Lösung:

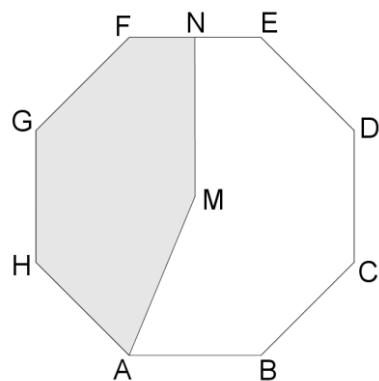
Wenn n ungerade ist, dann sind alle Teiler von n ungerade. Daher ist die Summe von n und ihrem zweitgrößten Teiler gerade. Da 39 ungerade ist, kann n nicht ungerade sein. Wenn n gerade ist, dann ist $\frac{n}{2}$ der zweitgrößte Teiler von n . Da $n + \frac{n}{2} = 3 \cdot \frac{n}{2}$ ist, folgt $\frac{n}{2} = 13$ und daraus die

Antwort:

Die Zahl n ist 26.

Fläche im Achteck

Gegeben ist ein regelmäßiges Achteck ABCDEFGH mit dem Mittelpunkt M und einem Flächeninhalt von 32 cm^2 . Wie groß ist der Inhalt der grauen Fläche, wenn N der Mittelpunkt der Seite EF ist?



Lösung:

Das Achteck ABCDEFGH lässt sich in 16 rechtwinklige Dreiecke unterteilen, die alle zum Dreieck MFN kongruent sind. Ein solches Dreieck hat einen Flächeninhalt von 2 cm^2 . Die graue Fläche besteht aus sieben solchen Dreiecken. Daraus folgt die

Antwort:

Der Inhalt der grauen Fläche beträgt 14 cm^2 .

Mattis löscht Ziffern

Mattis schreibt 100-mal die Zahl 2019 auf eine Tafel. Dann löscht er von den insgesamt 400 Ziffern 55 gerade und 55 ungerade Ziffern weg, sodass die Summe der übrig gebliebenen Ziffern 1139 beträgt.

Wie oft hat Mattis die Ziffer 0 von der Tafel gelöscht?

Lösung:

Bevor Mattis Ziffern löscht, beträgt die Ziffernsumme der 100 Zahlen auf der Tafel 1200. Die Summe der Ziffern, die er gelöscht hat, ist also 61. Dies ist nur möglich, wenn er 55-mal die Ziffer 1 und 3-mal die Ziffer 2 gelöscht hat. Es folgt die

Antwort:

Mattis hat 52-mal die Ziffer 0 gelöscht.

Zahlen mit lauter ungeraden Ziffern

Wie viele dreistellige Zahlen, die nur ungerade Ziffern enthalten, sind größer als 550?

Lösung:

Insgesamt gibt es 450 dreistellige Zahlen, die größer oder gleich 550 sind. Davon müssen 200 Zahlen mit einer geraden Hunderterstelle ($H = 6$ oder $H = 8$) subtrahiert werden. Von den restlichen 250 Zahlen ($H = 5$ oder $H = 7$ oder $H = 9$) haben 120 Zahlen eine gerade Zehnerstelle und von den verbleibenden 130 Zahlen hat die Hälfte eine gerade Einerstelle. Es folgt die

Antwort:

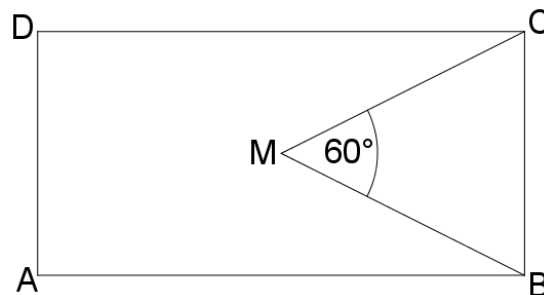
Es gibt 65 dreistellige Zahlen, die nur ungerade Ziffern enthalten und größer als 550 sind.

Seitenlänge eines Rechtecks

Das Rechteck ABCD hat den Umkreismittelpunkt M. Der Winkel $\angle BMC$ beträgt 60° . Die Diagonale AC ist 32 cm lang.

Wie lang ist die Seite AD?

(Achtung: Nicht abmessen! Die Skizze ist ungenau!)



Lösung:

Da die Winkelsumme in einem Dreieck 180° beträgt und das Dreieck BCM gleichschenkelig ist, sind alle Eckenwinkel im Dreieck BCM gleich 60° . Das Dreieck BCM ist also ein gleichseitiges Dreieck. Da M der Umkreismittelpunkt des Rechtecks ABCD ist, gilt $\overline{MC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} = 16$; daher ist auch $\overline{BC} = 16$. Daraus folgt die

Antwort:

Die Seite AD ist 16 cm lang.

Anna rechnet mit Ziffernsummen

Anna subtrahiert von einer Zahl, die aus einer Million Einser besteht, die Zahl 2. Vom Ergebnis bildet Anna die Ziffernsumme und von diesem Ergebnis noch einmal die Ziffernsumme.

Welche Zahl erhält Anna am Ende?

Lösung:

$\underbrace{111111\dots11}_{1 \text{ Million Einser}} - 2 = \underbrace{111111\dots1109}_{999998 \text{ Einser}}$. Die Ziffernsumme der Differenz ist 1000007. Bildet man von dieser Zahl nochmals die Ziffernsumme, so folgt die

Antwort:

Am Ende erhält Anna die Zahl 8.

Summe von natürlichen Zahlen

Addiert man alle natürlichen Zahlen von n bis n + 10, so erhält man die Summe 176.

Mit welcher natürlichen Zahl n muss man beginnen?

Lösung:

$n + n + 1 + n + 2 + n + 3 + n + 4 + n + 5 + n + 6 + n + 7 + n + 8 + n + 9 + n + 10 = 176 \Rightarrow$
 $11 \cdot n + 55 = 176 \Rightarrow n = 11$. Man erhält also die

Antwort:

Man muss mit $n = 11$ beginnen.

Theos Rechnung mit Spielkarten

Theo hat drei Spielkarten vor sich liegen. Auf einer Karte steht die Ziffer 1, auf einer die Ziffer 4 und auf einer die Ziffer 7.

In der Spielanleitung steht: „Lege die drei Spielkarten so nebeneinander auf, dass die drei Ziffern auf den Karten die größtmögliche dreistellige Zahl bilden und notiere diese Zahl als 1. Zahl. Dann lege die drei Spielkarten so nebeneinander auf, dass die drei Ziffern auf den Karten die nächstkleinere dreistellige Zahl bilden und notiere diese Zahl als 2. Zahl. Wiederhole diesen Vorgang so lange, bis du die kleinstmögliche Zahl notiert hast, die du aus den drei Ziffern bilden kannst.

Nun beginnt die Rechnung: Bilde die Differenz aus der 1. Zahl und der 2. Zahl und notiere sie als 1. Differenz. Bilde dann die Differenz aus der 2. Zahl und der 3. Zahl und notiere sie als 2. Differenz. Wiederhole diesen Vorgang so lange, bis du die kleinste Zahl subtrahiert hast.“
Wie groß ist die Summe aller Differenzen, die Theo notiert hat?

Lösung:

Theos Zahlen sind 741, 714, 471, 417, 174 und 147. Bildet man nun die Differenzen wie in der Anleitung, so erhält man die Zahlen 27, 243, 54, 243 und 27. Bildet man nun die Summe dieser Zahlen, so erhält man die

Antwort:

Die Summe aller Differenzen, die Theo notiert hat, ist 594.

Hinweis: Es ist natürlich kein Zufall, dass auch die Differenz von 741 und 147 gleich 594 ist.