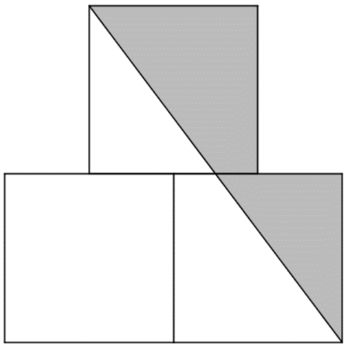
26. Wiener Mathematik- und Denksportwettbewerb
30. März 2016 - TU Wien

Zehn mathematische Denksportaufgaben und ihre Lösungen

Quadrate werden zerschnitten



Berechne den Inhalt der grauen Fläche, wenn jedes Quadrat die Seitenlänge 16 cm hat.

Lösung:

Ergänzt man die graue Fläche rechts oben um ein Rechteck mit den Seitenlängen 16 cm bzw. 8 cm, so entsteht ein rechtwinkliges Dreieck mit dem Flächeninhalt $\frac{32 \cdot 24}{2} = 384\ \text{cm}^2$. Subtrahiert man davon den Flächeninhalt des ergänzten Rechtecks, so folgt die

Antwort:
Der Inhalt der grauen Fläche beträgt 256 cm^2.

Sooo viele Achten!

Berechne die Ziffernsumme des Produkts $8 \cdot 888\ldots8$, wobei der zweite Faktor aus 28 Achten besteht.

Lösung:

Durch schriftliches Multiplizieren erkennt man: $888\ldots8 \cdot 8 = 7\underbrace{111\ldots11}_{\text{26 Einser}}04$. Die Ziffernsumme ist somit $7 + 26 \cdot 1 + 0 + 4 = 37$. Somit ist die

Antwort:
Die Ziffernsumme des Produkts beträgt 37.

Astrid und Bruno rechnen

Astrid addiert alle ungeraden Zahlen von 387 bis 723 und erhält als Summe die Zahl X. Bruno addiert alle geraden Zahlen von 386 bis 722 und erhält als Summe die Zahl Y.
Berechne die Differenz D = X – Y der Zahlen X und Y.

Lösung:

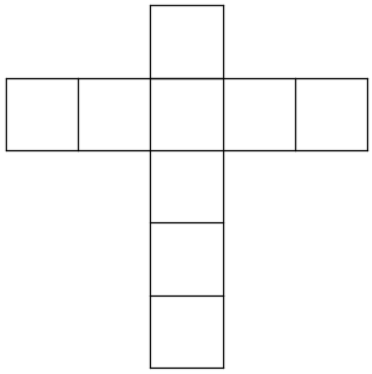
Durch geschicktes Anschreiben der Differenz von X und Y erkennt man:

$$D = X - Y = 387 + 389 + 391 + \ldots + 721 + 723 - (386 + 388 + 390 + \ldots + 720 + 722) = \underbrace{387 - 386}_{=1} + \underbrace{389 - 388}_{=1} + \underbrace{391 - 390}_{=1} + \ldots + \underbrace{721 - 720}_{=1} + \underbrace{723 - 722}_{=1}$$

Es gibt $723 - 385 = 338$ natürliche Zahlen von 386 bis 723, also 169 Zahlenpaare, deren Differenz jeweils 1 ist. Daraus folgt die

Antwort:
Die Differenz D beträgt 169.

Zahlenkreuz



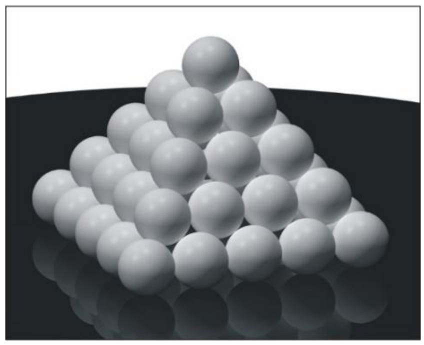
Die waagrechte Zeile und die senkrechte Spalte sollen mit den Ziffern 1, 3, 5, 7, 8 befüllt werden. In der Zeile müssen alle Ziffern vorkommen und ebenso in der Spalte. Die Summe aller eingesetzten Ziffern muss durch 3 teilbar sein. Wenn du die Zeile von links nach rechts und die Spalte von oben nach unten liest, erhältst du zwei Zahlen.
Wie groß ist die kleinstmögliche Summe der beiden Zahlen?

Lösung:

Weil die Summe der gegebenen Ziffern ($1 + 3 + 5 + 7 + 8 = 24$) durch 3 teilbar ist, muss im gemeinsamen Feld die Ziffer 3 stehen, damit auch die Summe der neun Ziffern im Kreuz durch 3 teilbar ist. Die kleinstmögliche Summe wird erreicht, wenn die senkrechte und waagrechte Zahl möglichst klein sind. Dazu müssen die Ziffern von oben nach unten bzw. von links nach rechts aufsteigend eingesetzt werden, also 13578 senkrecht und 15378 waagrecht. Durch Addition dieser beiden Zahlen erhält man die

Antwort:
Die kleinstmögliche Summe beträgt 28956.

Kugelpyramiden



Diese Pyramide ist aus gleich großen Kugeln aufgebaut. Sie besteht nur aus den von außen zu sehenden Kugeln; innen ist sie hohl. Du hast 465 Kugeln zur Verfügung und sollst möglichst viele Pyramiden bauen, die genauso aussehen wie die Pyramide auf dem Bild.
Wie viele Kugeln bleiben übrig?

Lösung:

Eine Pyramide besteht aus $16 + 12 + 8 + 4 + 1 = 41$ Kugeln. Wenn du 465 durch 41 dividierst, erhältst du den Quotienten 11 und den Rest 14. Daher ergibt sich die

Antwort:
Es bleiben 14 Kugeln übrig.

Zahlenreihe

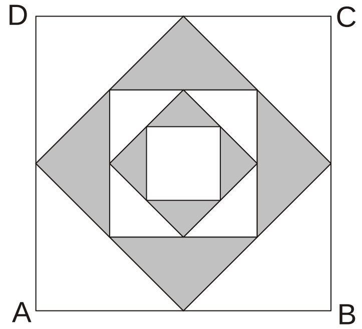
Die sechs Zahlen A, B, C, D, E, F stehen in dieser Reihenfolge nebeneinander. Die Summe von je drei nebeneinander stehenden Zahlen beträgt 60. Die Zahl C ist 17.
Berechne die Zahl F.

Lösung:

Da die Summe von drei nebeneinander stehende Zahlen stets 60 und $C = 17$ ist, muss $C + D + E = 60$ und damit $D + E = 43$ sein. Nun ist aber auch $D + E + F = 60$ und damit $F = 17$. Es folgt also die

Antwort:
Die Zahl F ist 17.

Quadrate im Quadrat



Gegeben ist ein Quadrat ABCD mit der Seitenlänge $a = 48$ cm. In das Quadrat ABCD wird ein zweites Quadrat eingeschrieben, dessen Eckpunkte die Seitenmittelpunkte des ersten Quadrats sind. Genauso wird in das zweite Quadrat ein drittes Quadrat eingeschrieben usw. Beim fünften Quadrat ist Schluss.
Wie groß ist der gesamte Inhalt der grauen Flächen?

Lösung:

Die weißen Flächen innerhalb des Quadrats ABCD setzen sich aus vier rechtwinkligen Dreiecken mit den Kathetenlängen 24 cm, vier rechtwinkligen Dreieck mit den Kathetenlängen 12 cm und einem Quadrat mit der Seitenlänge 12 cm zusammen. Der Inhalt dieser Flächen ist $4 \cdot \frac{24 \cdot 24}{2} + 4 \cdot \frac{12 \cdot 12}{2} + 12 \cdot 12 = 1584\ \text{cm}^2$. Der Inhalt der grauen Flächen ergibt sich, wenn man den Inhalt der weißen Flächen vom Inhalt des Quadrates ABCD subtrahiert. Daraus folgt die

Antwort:
Der Inhalt der grauen Fläche beträgt $720\ \text{cm}^2$.

Taschengeld für Anna

Anna bekommt um die Hälfte mehr Taschengeld als Karim. Karim bekommt um 11 Euro mehr als Mina. Mina bekommt nur halb so viel wie Julia, die gleich viel wie Anna bekommt.
Wie viel Taschengeld bekommt Anna?

Lösung:
Angenommen Anna bekommt x Euro Taschengeld. Dann bekommt Karim $\frac{2}{3} \cdot x$ Euro und Mina bekommt $\frac{2}{3} \cdot x - 11$ Euro. Da Julia gleichviel wie Anna, also x Euro, und Mina halb so viel wie Julia, also $\frac{1}{2} \cdot x$ Euro bekommt, muss $\frac{2}{3} \cdot x - 11 = \frac{1}{2} \cdot x$ sein. Lösen der Gleichung ergibt die

Antwort:
Anna bekommt 66 Euro Taschengeld.

Punkte sammeln im Team

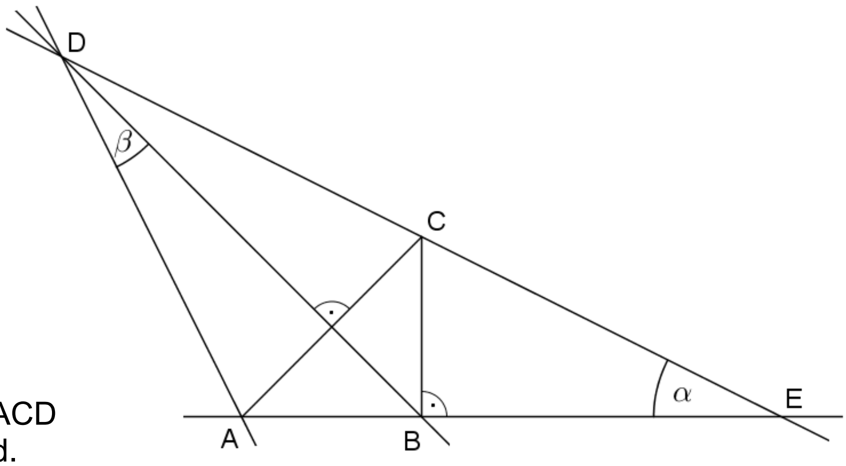
In einem Team sind zwei Mädchen und drei Buben. Bei einem Spiel erhielten die beiden Mädchen zusammen genauso viele Startpunkte wie die drei Buben zusammen, nämlich 1800.
Am Ende gewann jedes Mädchen 13% dazu und jeder Bub verlor 9%. Um wie viele Punkte hat sich die Gesamtpunkteanzahl des Teams verändert?

Lösung:

Da jedes Mädchen 13% dazu gewinnt, spielt es für die Rechnung keine Rolle, wie die Punkte unter den Mädchen aufgeteilt sind. Das Gleiche gilt für die Buben. Nach dem Spiel haben die Mädchen zusammen $1800 \cdot 1{,}13 = 2034$ Punkte und die Buben $1800 \cdot 0{,}91 = 1638$ Punkte. Das Team hat also 3672 Punkte. Da das Team 3600 Startpunkte hatte, folgt die

Antwort:
Die Gesamtpunktezahl des Teams hat sich um 72 Punkte verändert.

Winkelsuche



In der hier zu sehenden Zeichnung sind die Strecken AB und BC gleich lang, der Winkel α beträgt 21°.
Wie groß ist der Winkel β?
(Achtung: Nicht nachmessen! Die Zeichnung ist ungenau!)

Lösung:

Da ABC gleichschenklig ist, ist auch ACD gleichschenklig und ABCD ein Deltoid.
Daraus folgt, dass ∢BDC $= \beta$ ist. Die Strecke BD halbiert ∢CBA = 90°. Deshalb ist ∢CBD = 45° und ∢EBD = 135°. Da die Winkelsumme im Dreieck BED gleich 180° ist, folgt aus ∢BDC = 180° – (135° + 21°) die

Antwort:
Der Winkel β beträgt 24°.